7 Zufallsmatrizen

Die Bedeutung von Zufallsmatrizen oder Übergangsmatrizen hat in den letzten Jahren zugenommen. Sie werden teilweise im Zentralabitur benutzt. Daher bietet dieser Abschnitt einen umfangreichen Einstieg und eine Vertiefung an zwei Beispielen. In einer der Vertiefungen wird eine Brücke zwischen der linearen Algebra und der Stochastik geschlagen.

Die mögliche Unterrichtsreihe sollte einen vollständigen „Pfad“ schaffen. Daher werden mit den Beispielen 1 bis 3 die Grundlagen von Zufallsmatrizen gelegt. Hierbei ist der ClassPad lediglich für elementare Rechnungen zu nutzen. Man kann jedoch bei den Berechnungen Indizes $(i; j)$ für die bedingten Wahrscheinlichkeiten nehmen und früher zu den Übergangsmatrizen kommen.

Nach Beispiel 1 b) bietet sich die Definition einer Markov-Kette an; sie ist jedoch für die folgenden Aufgaben nicht zwingend nötig. In Beispiel 2 muss eine Anfangsverteilung benutzt werden, was bei den Berechnungen zu berücksichtigen ist. Anschließend stellt man die Produktregel für Pfade auf.

Für Beispiel 4 ist es vorteilhaft, die Übergangsmatrix einzuführen, da die Berechnungen umfangreicher werden. Nachdem die Beispiele 3 und 4 bearbeitet wurden, bieten sich Übungen zum Verständnis der Begriffe an.

In Beispiel 5 werden Eigenschaften der Übergangsmatrix untersucht. Man begegnet erstmals einer *stationären Verteilung.*

Für die Anschaulichkeit bei Markov-Ketten haben Pfaddiagramme eine große Bedeutung. Dies wird in Beispiel 6 a) benutzt. In der Aufgabe 6 gelangt man zur Konvergenz gegen eine stationäre Verteilung.

Die Beispielkette von 1 bis 6 wird in Aufgabe 3 fortgeführt. Damit wird die Konvergenz gegen eine stationäre oder eine periodische Verteilung einer Übergangsmatrix untersucht.

In der ersten der beiden Vertiefungen wird in der Aufgabe 1 wird die stationäre Verteilung als Spezialfall eines Eigenvektors zum Eigenwert 1 auf die lineare Algebra übertragen und der allgemeine Fall des Eigenvektors einer linearen Abbildung untersucht. Hier treten an einer Stelle komplexe Zahlen auf, für die keine Vorkenntnisse nötig sind und die später nicht verwendet werden.

In der zweiten Vertiefung wird der Wurf mit einem unfairen und einem fairen Würfel untersucht. Dabei werden zwei Übergangsmatrizen kombiniert und die Pfade anschaulich dargestellt. Der angedeutete Algorithmus bietet einen Einblick in das *Hidden Markov Model*, das Anwendung in der Schrift- und Spracherkennung sowie der Bioinformatik findet. Auf der CD befindet sich ein Programm für den ClassPad, das die Berechnungen teilweise übernimmt.

Da Vektoren in der üblichen Schreibweise $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ im Text viel Platz einnehmen, haben wir uns dazu entschlossen, sie in der Form ${}^t(x_1, \ldots, x_n)$ (t für *transponiert*) zu notieren.

Zufallsmatrizen

Beispiel 1 Claudia und Ingo möchten sich Vorstellungen über die Wegsuche von einem Ort zu einem anderen machen. Sie starten hierzu Gedankenexperimente mit einem Ort, der lediglich vier Straßen hat, die sich an vier Ecken e_1, e_2, e_3 und e_4 treffen.

$$\begin{tikzcd}
e_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & e_2 \arrow[d, dash] \\
e_3 \arrow[r, dash] & e_4
\end{tikzcd}$$

Ingo startet an der Ecke e_1, wirft an jeder Ecke eine (faire) Münze und geht genau dann den Weg zum Nachbarort mit der größeren Zahl, wenn eine Zahl fällt.

Die Zufallsvariablen werden mit $X_0, X_1, \ldots$ bezeichnet, und es gilt $P(X_0 = e_1) = 1$.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht Ingo e_1, e_2, e_3 als nächsten Ort?

b) Claudia und Ingo möchten die Ecke e_3 erreichen. Ingo denkt, dass die Wahrscheinlichkeit, den Ort mit dem fünften Weg zu erreichen, größer ist als die Wahrscheinlichkeit, mit dem dritten Weg zu dem Ort zu kommen. Claudia sagt, dass die Wahrscheinlichkeiten gleich groß sind.
Wer hat recht? Erklären Sie das Ergebnis.

Beispiel 2 Claudia wählt zufällig den Startpunkt e_1 oder e_2 aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Touren

$$P(X_0 = e_1, X_1 = e_3) \quad \text{und} \quad P(X_0 = e_2, X_1 = e_3).$$

Beispiel 3 Ingo wählt mit den Wahrscheinlichkeiten $\pi_1 = \frac{1}{3}$ und $\pi_2 = \frac{2}{3}$ einen der Startorte 1 oder 2 aus. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_0 = e_1, X_1 = e_3, X_2 = e_4, X_3 = e_3) \quad \text{und} \quad P(X_0 = e_2, X_1 = e_3, X_2 = e_1, X_3 = e_2)\,?$$

Beispiel 4 Ingo wählt zufällig mit einer Wahrscheinlichkeit $\pi_1 = 0{,}3$ den Startort e_1 und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\pi_2 = 0{,}7$ den Startort e_2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht Ingo den Ort e_3 mit dem dritten Weg über den Startort e_1?

Beispiel 5 Claudia startet

a) sicher an Ecke 1,

b) gleich wahrscheinlich an den Ecken 1 oder 2,

c) mit den Wahrscheinlichkeiten $\pi_1 = 0{,}3$ an Ecke 1 und $\pi_2 = 0{,}7$ an Ecke 2.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht sie die verschiedenen Orte nach dem ersten bis fünften Weg? Erklären Sie dieses Ergebnis.

Beispiel 6 Claudia tauscht die faire Münze gegen eine Münze, deren Wahrscheinlichkeit für den Wurf einer Zahl gleich $\frac{3}{4}$ ist.

Ingo ändert die Regel des Münzwurfes so, dass er genau dann in der Pfeilrichtung $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ den Ort wechselt, wenn er eine Zahl wirft.

a) Zeichnen Sie ein Pfaddiagramm und notieren Sie die Übergangsmatrix im ClassPad.

b) Claudia und Ingo möchten an der Ecke 1 starten und Ecke 3 erreichen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, über den ersten (zweiten, dritten, vierten) Weg die Ecke 3 zu erreichen.

c) Claudia und Ingo wählen ihren Startort zufällig aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreichen sie die verschiedenen Ecken über den ersten (zweiten, dritten, vierten) Weg der Tour?

d) Ingo und Claudia wundern sich über die Ergebnisse und fragen sich, wie es ist, wenn sie mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten an den verschiedenen Ecken starten.

   Führen Sie die Berechnungen für verschiedene Startverteilungen durch. Deuten Sie das Ergebnis.

Lösung von Beispiel 1. In der Lösung werden die Ecken e_1 bis e_4 durch ihre Nummern 1 bis 4 bezeichnet.

a) Gefragt ist hier nach den bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} &P(X_0=1)\cdot P(X_1=1|X_0=1) \;=\; 0,\\ &P(X_0=1)\cdot P(X_1=2|X_0=1) \;=\; P(X_0=1)\cdot P(X_1=3|X_0=1)=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Hier berechnen wir die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X_0=1, X_3=3) \quad \text{und} \quad P(X_0=1, X_5=3).$$

Für die Reihenfolge der erreichten Ecken mit drei Wegen gibt es die Möglichkeiten

$$1\to2\to4\to3, \quad 1\to2\to1\to3, \quad 1\to3\to1\to3, \quad 1\to3\to4\to3.$$

Geht man entlang der Wege des Graphen, ergeben sich mit $\pi_1 = P(X_0=1)$

$$\begin{aligned} &P(X_3=3, X_2=4, X_1=2, X_0=1)\\ &= P(X_3=3|X_2=4)\cdot P(X_2=4|X_1=2)\cdot P(X_1=2|X_0=1)\cdot\pi_1\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1=\tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

und analog Ergebnisse für die übrigen Pfade. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} P(X_0=1, X_3=3) \;&=\; P(X_3=3, X_2=4, X_1=2, X_0=1)\cdot\pi_1\\ &+\; P(X_3=3, X_2=1, X_1=2, X_0=1)\cdot\pi_1\\ &+\; P(X_3=3, X_2=1, X_1=3, X_0=1)\cdot\pi_1\\ &+\; P(X_3=3, X_2=4, X_1=3, X_0=1)\cdot\pi_1\\ &=\; 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Für die Touren über fünf Wege existieren 16 Möglichkeiten, die alle mit derselben Wahrscheinlichkeit eintreten. Also hat Claudia recht, denn es folgt

$$P(X_0=1, X_5=3)=\sum_{k=1}^{16} P(X_1=2|X_0=1)=16\cdot\tfrac{1}{32}=\tfrac{1}{2}.$$

Lösung von Beispiel 2. Da Claudia zufällig 1 oder 2 als Startort auswählt, nimmt sie an:

$$P(X_0 = 1) = \pi_1 = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(X_0 = 2) = \pi_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Hiermit folgt

$$P(X_0 = 1, X_1 = 3) = P(X_0 = 1) \cdot P(X_1 = 3|X_0 = 1) = \pi_1 \cdot P(X_1 = 3|X_0 = 1) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}.$$

Analog gilt

$$P(X_0 = 2, X_1 = 3) = P(X_0 = 2) \cdot P(X_1 = 3|X_0 = 2) = \pi_2 \cdot P(X_1 = 3|X_0 = 2).$$

Da die Ecken 2 und 3 nicht direkt durch einen Weg miteinander verbunden sind, gilt $P(X_1 = 3|X_0 = 2) = 0$, und es folgt $P(X_0 = 2, X_1 = 3) = 0$.

Lösung von Beispiel 3. Ingo wählt 1 oder 2 mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_0 = 1) = \pi_1 = \tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad P(X_0 = 2) = \pi_2 = \tfrac{1}{2}.$$

als Startort. Ferner gelten $P(X_1 = 3|X_0 = 1) = \frac{1}{2}$ und $P(X_1 = 3|X_0 = 2) = 0$, woraus

$$\begin{aligned}
&P(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 3)\\
=\ &P(X_0 = 1) \cdot P(X_1 = 3|X_0 = 1) \cdot P(X_2 = 4|X_1 = 3) \cdot P(X_3 = 3|X_2 = 4)\\
=\ &\pi_1 \cdot \prod_{j=1}^{3} P(X_j = i_j|X_{j-1} = i_{j-1}) = \tfrac{1}{16}
\end{aligned}$$

und $P(X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 2) = 0$ folgen.

Lösung von Beispiel 4. Es gibt vier Möglichkeiten, die Ecke 3 mit drei Wegen zu erreichen:

$$1 \to 2 \to 4 \to 3, \quad 1 \to 3 \to 4 \to 3, \quad 1 \to 2 \to 1 \to 3 \quad \text{und} \quad 1 \to 3 \to 1 \to 3.$$

Mit $\pi_1 = P(X_0 = 1)$ folgt

$$\begin{aligned}
&P(X_0 = 1, X_3 = 3)\\
=\ &\pi_1 \cdot P(X_1 = 2|X_0 = 1) \cdot P(X_2 = 4|X_1 = 2) \cdot P(X_3 = 3|X_2 = 4)\\
&+\pi_1 \cdot P(X_1 = 3|X_0 = 1) \cdot P(X_2 = 4|X_1 = 3) \cdot P(X_3 = 3|X_2 = 4)\\
&+\pi_1 \cdot P(X_1 = 2|X_0 = 1) \cdot P(X_2 = 1|X_1 = 2) \cdot P(X_3 = 3|X_2 = 1)\\
&+\pi_1 \cdot P(X_1 = 3|X_0 = 1) \cdot P(X_2 = 1|X_1 = 3) \cdot P(X_3 = 3|X_2 = 1)\\
=\ &4 \cdot \pi_1 \cdot P(X_1 = 2|X_0 = 1) \cdot P(X_2 = 4|X_1 = 2) \cdot P(X_3 = 3|X_2 = 4)\\
=\ &4 \cdot 0{,}3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 0{,}15.
\end{aligned}$$

Beim Start an der Ecke 2 gibt es keine Möglichkeit, den Ort 3 nach genau drei Wegen zu erreichen; daher folgt $P(X_0 = 2, X_3 = 3) = 0$.

Um es sich leichter zu machen, kann das Beispiel mithilfe der Übergangsmatrix P gelöst werden. Sie wird definiert durch

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anfangsverteilung $\vec{\pi}$ ist gleich $\vec{\pi} = {}^t(\pi_1; \pi_2; \pi_3; \pi_4) = {}^t(0{,}3; 0{,}7; 0; 0)$. Zur Lösung des Beispiels mit dem ClassPad ist unter Main einzugeben:

Math2 (Definition einer (4×4)-Matrix)

Dann sind die Werte in die Matrix einzutragen, vgl. Abbildung 1, links. Es folgt:

⇒ abc P EXE (Zuordnung der Matrix zur Variablen P)

Analog wird der Vektor der Anfangsverteilung definiert:

Math2 (Definition des Vektors)

Jetzt werden die Werte eingetragen; es folgt:

⇒ abc v EXE (Zuordnung der Matrix zur Variablen v)

Es folgt der Rechenschritt

P • v EXE (Multiplikation von P mit v)

Das Ergebnis ${}^t\left(\frac{7}{20}; \frac{3}{20}; \frac{3}{20}; \frac{7}{20}\right)$ gibt die Wahrscheinlichkeiten an, am ersten Weg die Ecken 1 bis 4 zu erreichen, wenn man mit den Wahrscheinlichkeiten 0,3 bzw. 0,7 an den Ecken 1 bzw. 2 gestartet ist.

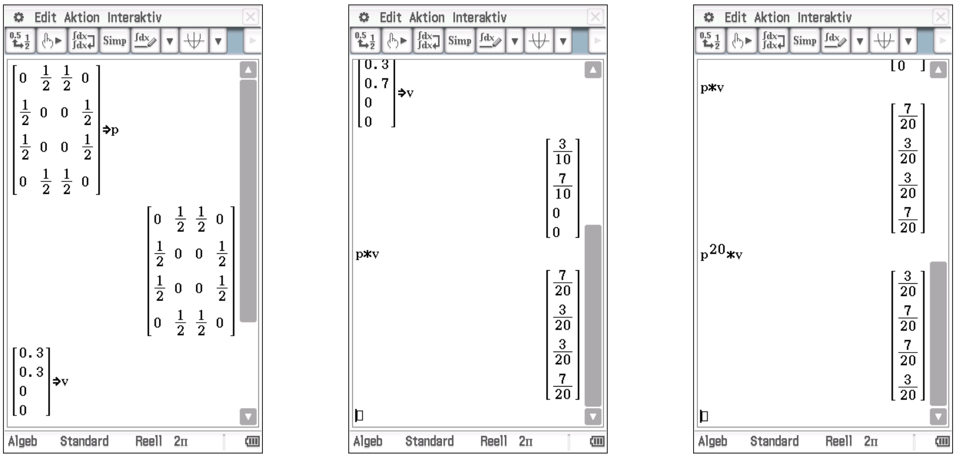


Abbildung 1: Startverteilung ${}^t(\frac{3}{10}; \frac{7}{10}; 0; 0)$ und Konvergenz gegen eine stationäre Verteilung

Um die Wahrscheinlichkeit für die Ankunft an Ecke 3 mit dem dritten Weg zu berechnen, ist der Startverteilung $\vec{\pi}$ mit der dritten Potenz von P zu multiplizieren, vgl. Abbildung 1 für eine höhere Potenz. Das Ergebnis ist wie oben ${}^t(0{,}35; 0{,}15; 0{,}15; 0{,}35)$.

Das Ergebnis stimmt mit dem oben berechneten überein. Die Vor- und Nachteile sind abzuschätzen:

1) Die Berechnung mithilfe der Matrix ist schnell möglich und kann auf Ereignisse mit einer hohen Anzahl an Wiederholungen angewandt werden.
2) Die Berechnung über die Beschreibung der Pfade hat den Vorteil, dass anschauliche Zusammenhänge klar werden. Insbesondere, dass das Erreichen des Ziels nur über bestimmte Startorte möglich ist!

Lösung von Beispiel 5. a) Nach einer ungeraden Zahl von Wanderungen steht Claudia jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ an den Ecken 2 oder 3. Nach einer geraden Zahl von Wanderungen steht Claudia jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ an den Ecken 1 oder 4. Es handelt sich hierbei um Orbits der Periode zwei, was am Graphen erkennbar ist.

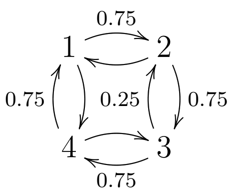
b) Es gilt $P \cdot \pi = {}^t\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, d. h., dass alle Ecken mit gleicher Wahrscheinlichkeit erreicht werden. Für diese Verteilung $\tilde{\pi} = {}^t\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ gilt $P^n \cdot \tilde{\pi} = \tilde{\pi}$ für alle $n \geqslant 1$, d. h., diese Verteilung ist stationär.

c) Es gilt

$$P^n \cdot \pi = \begin{cases} {}^t(0{,}35; 0{,}15; 0{,}15; 0{,}35) & \text{für ungerade Exponenten } n, \\ {}^t(0{,}15; 0{,}35; 0{,}35; 0{,}15) & \text{für gerade Exponenten } n \end{cases}$$

Es handelt sich wiederum um einen Orbit der Periode 2. Daher erreicht Claudia die Orte am ersten, dritten und fünften Tag mit den Wahrscheinlichkeiten des Vektors ${}^t(0{,}35; 0{,}15; 0{,}15; 0{,}35)$. Analog gilt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des zweiten bzw. des vierten Tages ${}^t(0{,}15; 0{,}35; 0{,}35; 0{,}15)$.

Lösung von Beispiel 6. a) Das Diagramm ist



Hiermit ergibt sich die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Der Start an Ecke 1 gibt die Startverteilung $\pi = {}^t(1; 0; 0; 0)$

Die Multiplikation mit verschiedenen Potenzen von P ergibt

$$P^n \cdot \pi \approx \begin{cases} {}^t\left(\frac{1}{2}; 0; 0; \frac{1}{2}\right) & \text{für gerades } n \\ {}^t\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

Dies ist ein Orbit der Periode 2.

c) Für die Startverteilung $\pi = {}^t\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ folgt $P^n \cdot \pi = {}^t\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$. π ist damit eine stationäre Verteilung.

d) Für viele Startverteilungen gilt, dass der Orbit sich einer Verteilung nähert. Diese Grenzverteilung ist eine stationäre Verteilung $\tilde{\pi}$, d. h. $P \cdot \tilde{\pi} = \tilde{\pi}$.